Fuerza entre un hilo y una espira

De Laplace

1 Enunciado

Una espira rectangular de lados a y b, recorrida por una corriente I_1, es coplanaria con un conductor rectilíneo, por el que circula una corriente I_2. La distancia del centro de la espira al hilo es d. Halle la fuerza que aparece entre el hilo y la espira.

2 Solución

Aunque la expresión para la fuerza entre elementos de corriente no es simétrica en la forma en la que aparecen los dos elementos, sí lo es la expresión final para fuerzas entre corrientes cerradas o que se vayan al infinito. Por ello nos basta con hallar la fuerza que el hilo produce sobre la espira. La que la espira produce sobre el hilo será igual y de sentido contrario.

Se cumple igualmente que la fuerza neta que una espira produce sobre sí misma es nula.

La fuerza producida sobre una corriente por un campo magnético viene dada por la expresión

$$\mathbf{F} = I_1 \oint \mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{B}$$

En este caso $\mathrm{d}\mathbf{r}$ es el correspondiente a un elemento de espira. $\mathbf{B}$ es el producido por el hilo.

A la hora de hallar la fuerza tenemos que suponer que $d > (a / 2)$, con lo que toda la espira queda al mismo lado del hilo. En caso contrario tendríamos que la fuerza se hace infinita, ya que habría puntos de la espira que percibirían un campo infinito. Esto conduciría a una integral impropia divergente.

Situaremos la espira en un plano XZ, estando el hilo situado sobre el eje z. El campo magnético creado por el hilo, en este plano, vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\mathbf{u}_{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\mathbf{u}_y$$

Podemos hallar la fuerza sumando la fuerza sobre cada una de las varillas.

Para la más cercana tenemos

$$\mathbf{F}_1=\int_0^b I_1\mathrm{d}z\mathbf{u}_z\times\left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi(d-a/2)}\mathbf{u}_y\right)-\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d-a/2)}\mathbf{u}_x$$

Análogamente, para la mas alejada resulta

$$\mathbf{F}_3=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi(d+a/2)}\mathbf{u}_x$$

Por otro lado, las fuerzas sobre las varillas horizontales son iguales y de sentidos opuestos

$$\mathbf{F}_2=-\mathbf{F}_4$$

Estas fuerzas contribuirían si deseáramos calcular la tensión a que está sometida cada varilla, pero admitimos que ésta se ve compensada por la rigidez del material

Todo esto da una fuerza total

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_3+\mathbf{F}_4=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 ab}{2\pi(d^2-a^2/4)}\mathbf{u}_x$$

Obsérvese que esta fuerza no es debida tanto a la presencia del campo magnético como al hecho de que este no es uniforme. Si $\mathbf{B}$ hubiera tenido un valor uniforme, entonces

$$\mathbf{F}=I_1\oint\mathrm{d}\mathbf{r}\times\mathbf{B}=I_1\left(\oint\mathrm{d}\mathbf{r}\right)\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$$

Como caso particular podemos ver que ocurre en el límite $I_2\to\infty$, $a,b\to 0$ con $I_2ab\to m=$cte, en el cual la espira se reduce a un dipolo magnético de momento dipolar *m*. El valor de la fuerza queda como

$$\mathbf{F}\to\frac{\mu_0 m I_1}{2\pi d^2}\mathbf{u}_x$$

Este valor coincide con el que obtiene a partir de la expresión